Involutions et autres douceurs

Les trois parties de ce devoir sont indépendantes.

Deux niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue : parties **1**, **2** et **3** question **1)**.

— Piste rouge : tout le devoir.

1 Combien de partages équitables ?

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

1) Combien existe-t-il de partitions de l'ensemble $[\![1, np]\!]$ en p parties de cardinal n ? On rappelle qu'une partition est un ensemble d'ensembles. Le résultat final est très simple.

2) Combien existe-t-il d'applications de $[\![1, np]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$ dont tout élément de l'image possède exactement n antécédents ?

2 Combien de parties sans entiers consécutifs ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre de parties sans entiers consécutifs de $[\![1, n]\!]$.
Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est récurrente linéaire d'ordre 2, puis que : $\quad a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+2}$.

3 Combien d'involutions ?

Pour tout ensemble non vide E, on appelle *involution de* E toute application $\sigma : E \longrightarrow E$ pour laquelle $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}_E$. On note alors i_n le nombre d'involutions de $[\![1, n]\!]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $i_0 = 1$.

1) a) Montrer proprement que pour tous ensembles finis non vides E et F de mêmes cardinaux, il existe autant d'involutions de E que d'involutions de F.

b) Calculer i_1, i_2 et i_3.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad i_{n+1} = i_n + n\, i_{n-1}$. $\quad$ On pourra distinguer les involutions de $[\![1, n+1]\!]$ qui fixent $n+1$ de celles qui ne le fixent pas.

On note φ la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $H_n \in \mathbb{R}[X]$ pour lequel $\varphi^{(n)} = H_n \varphi$.

b) Montrer que le polynôme H_n de la question **a)** est unique pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad H_{n+1} = XH_n + n\, H_{n-1} \quad$ en appliquant la formule de Leibniz à φ', puis que $H_n' = n\, H_{n-1}$.

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad H_n'' + XH_n' - n\, H_n = 0 \quad$ et $\quad i_n = H_n(1) \quad$ et déterminer une expression explicite de $H_{2n}(0)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note à présent f_n la fonction $x \longmapsto H_n(x)\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}}$ définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3) **a)** Exprimer $f_n''(x)$ en fonction de $f_n(x)$ et x pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

b) En déduire que $\left(n+\dfrac{1}{2}\right) f_n \leqslant f_n'' \leqslant \left(n+\dfrac{3}{4}\right) f_n$ sur $[0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Soient $f \in \mathscr{C}^2\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On suppose que $f'(0)=0$ et que $\alpha^2 f \leqslant f'' \leqslant \beta^2 f$ sur $[0,1]$.
Montrer que pour tout $x \in [0,1]$: $\quad f(x) \geqslant f(0)\,\mathrm{ch}(\alpha x) \quad$ grâce aux variations de la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{\mathrm{ch}(\alpha x)}$.
On montre de même — mais on l'admet — que pour tout $x \in [0,1]$: $\quad f(x) \leqslant f(0)\,\mathrm{ch}(\beta x)$.

On admet la *formule de Stirling* : $\quad n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2n\pi}$.

5) Déterminer un réel $\lambda > 0$ pour lequel : $\quad H_{2n}(0) \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda \left(\dfrac{2n}{\mathrm{e}}\right)^n$, $\quad$ puis montrer que : $\quad i_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} \left(\dfrac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{2n}{2}} \mathrm{e}^{\sqrt{2n}}$.

6) On pose $u_n = \dfrac{i_n}{i_{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad u_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{u_n}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad \sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{n+1}+1$.

c) En déduire que : $\quad i_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} i_n \sqrt{n}$.

Combiné à l'équivalent de la question **5)**, le résultat de la question **6)c)** fournit un équivalent de la même forme de i_{2n+1} lorsque n tend vers $+\infty$. Finalement :

$$i_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{\sqrt{n}}.$$